物理（力学）	４枚の内１

以下の文章を読んで，①～⑲ の空欄に当てはまる式を答えよ．また，下線部 (A) ～ (C) については，＜設問＞の指示にしたがって解答せよ．

図 1 に示すように，厚さを無視できる半径 R，質量 M の薄肉の半円筒が，ともに滑らかな水平床と鉛直壁に接して回転する問題を考える．

なお，C は直径 AB の中点で，いま座標系 xy の原点 O に一致している．D は円弧 AB の中点で，G は線分 CD 上に存在する半円筒の重心である．また，H は鉛直壁からの反力，V は水平床からの反力を表す．なお，重力加速度を g とする．

いま，ある力を加えて，CA が y 軸となす角 $\theta = 0$ の位置で静止した状態にし (A)，その力を瞬時に取り去って，半円筒が回転し始めたとする．

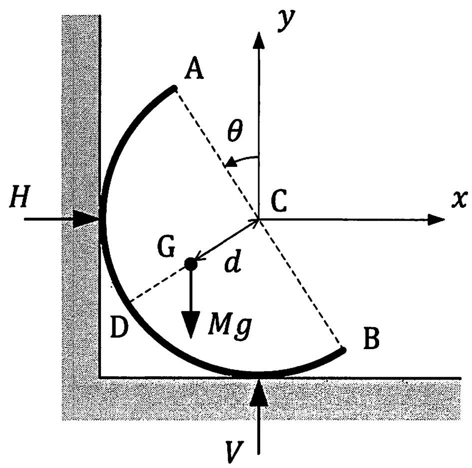

図1

まず準備として，半円筒の重心 G の位置と慣性モーメントを求めておこう．重心 G の点 C からの距離を d とすると，図 2 を参考にすれば，次の式の積分が成り立つ．

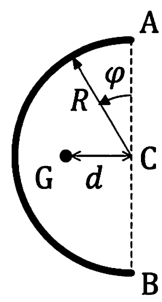

図2

$$\int_0^\pi \boxed{\quad ① \quad} \sigma R \, d\varphi = 0 \qquad (1)$$

ここで，σ は，半円筒の単位円弧長あたりの質量 $\sigma = \boxed{\quad ② \quad}$ である．式(1)から，$d = \boxed{\quad ③ \quad}$ であることがわかる．

（なお，これ以降の解答においては，d をそのまま用いること．）

一方，半円筒の C 点まわりの慣性モーメント I_C は，質量 M の全てが半径 R 上にあるから，明らかに $I_C = MR^2$ である．したがって，重心 G まわりの慣性モーメント I_G は，慣性モーメントに関する平行軸の定理より $I_G = I_C - \boxed{\quad ④ \quad}$ である．

物理（力学）	４枚の内２

半円筒が鉛直壁から離れることがなければ，C 点は動かず，半円筒の運動は C 点まわりの回転運動だけである．よってその運動方程式は，

$$I_C\,\ddot{\theta} = \boxed{\quad ⑤ \quad} \tag{2}$$

である．なお，記号の上のドット 1 つは 1 階の時間微分を，ドット 2 つは 2 階の時間微分を表す．

式(2)の両辺に $2\dot{\theta}$ をかけて時間 t で積分し，$t = 0$ で $\dot{\theta} = 0$ の初期条件を考慮すると，$\dot{\theta}^2$ が以下のように求まる．(B)

$$\dot{\theta}^2 = \boxed{\quad ⑥ \quad} \tag{3}$$

なお，この関係は，式(2)の微分方程式を解くかわりに，エネルギー保存則から導くこともできる．

運動中の鉛直壁からの反力 H と水平床からの反力 V を求めるために，重心 G についての運動方程式を考える．重心 G の座標を (x, y) とするとき，並進運動については，

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= \\ M\ddot{y} &= \end{aligned}\ \boxed{\quad ⑦ \quad} \tag{4}$$

となる．重心まわりの回転運動については，

$$I_G\,\ddot{\theta} = \boxed{\quad ⑧ \quad} \tag{5}$$

となる． $\ddot{x}$ と $\ddot{y}$ は d と θ をつかって，次のように表せるから，

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \\ \ddot{y} &= \end{aligned}\ \boxed{\quad ⑨ \quad} \tag{6}$$

反力 H と V は，次式のように表せる．

$$\begin{aligned} H &= \\ V &= \end{aligned}\ \boxed{\quad ⑩ \quad} \tag{7}$$

これらの式を，式(5)の重心まわりの運動方程式に代入すれば，それは，C 点まわりの運動方程式，式(2)に帰着する．

式(2)，式(3)を用いると，式(7)より，反力はそれぞれ以下のように求まる．

$$H = \boxed{\quad ⑪ \quad} \tag{8}$$

$$V = \boxed{\quad ⑫ \quad} \tag{9}$$

鉛直壁からの反力 H の式(8)は $\theta > \pi/2$ で負となるから，半円筒は，ちょうど $\theta = \pi/2$ になったときに鉛直壁から離れることになる．

以下では，鉛直壁から離れて以降の運動について考察する．離れた瞬間（ $t = t_0$ とする）において，角度 $\theta(t_0)$ および角速度 $\dot{\theta}(t_0)$ は，以下のとおりである．

$$\theta(t_0) = \pi/2, \quad \dot{\theta}(t_0) = \boxed{\quad ⑬ \quad} \tag{10}$$

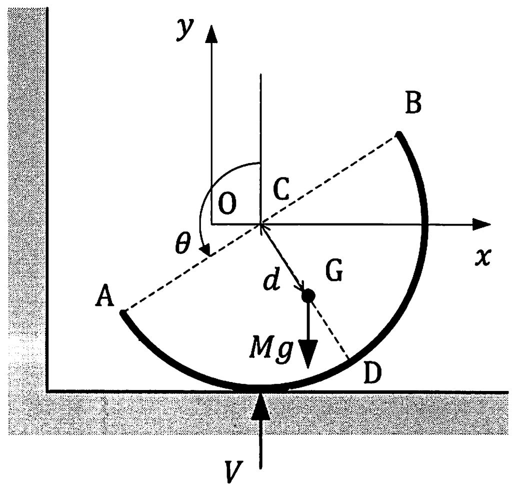

図3

それぞれの反力は，以下のとおりである．(C)

$$H(t_0) = 0, \quad V(t_0) = \boxed{\quad ⑭ \quad} \tag{11}$$

並進運動の速度は，以下のとおりである．

$$\dot{x}(t_0) = \boxed{\quad ⑮ \quad}, \quad \dot{y}(t_0) = 0 \tag{12}$$

したがって，離れる瞬間 $t = t_0$ において，半円筒の運動エネルギーは，

$$\text{重心まわりの回転運動 : 並進運動} = \boxed{\quad ⑯ \quad} \tag{13}$$

のような比に配分されている．

物理（力学）	４枚の内４

図３に示したとおり，離れてから半円筒に作用する力は，y軸方向のみであるから，半円筒は，揺れながら x軸方向には一定速度 $\dot{x}(t_0)$ で並進運動を続けることになる．

運動の支配方程式は，式(4)および式(5)において，$H=0$ としたものであるから，それらから，以下の式が導かれる．

$$\ddot{\theta}=\frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\left(\dot{\theta}^2\right)=\boxed{\quad ⑰ \quad}\,\dot{\theta}^2+\boxed{\quad ⑱ \quad} \tag{14}$$

この式は，$\dot{\theta}^2$についての θ に関する１階の微分方程式である．よって，これを，式(10)を初期条件として解けば，$\dot{\theta}^2$を θ の関数として定めることができる．その解から，$\dot{\theta}^2=0$ となるときの振れ角，すなわち θの最大値：$\theta_{\max}$ を求めることもできるが，θの最大値は，エネルギー保存則から，簡単に以下のように求まる．

$$\theta_{\max}=\boxed{\quad ⑲ \quad}\quad (\text{ただし，}\theta_{\max}>\pi/2\text{ の値をとる}) \tag{15}$$

<設問>

問1 下線部 (A) で述べている状態にするには，どれだけの大きさの力をどの点にどの向きに加えなければならないか，答えよ．また，その時の反力 Hと V の大きさを求めよ．

問2 下線部 (B) で述べていることを具体的に行い，式(3)を導出せよ．

問3 下線部 (C) に関して，水平床からの反力 $V(t_0)$ は，重力より大きくなるが，その増加分は何によるものか，説明せよ．