数　学	4 枚の内 1

[1] 以下の線形漸化式について考える.

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n \quad (n = 0, 1, 2 \cdots)$$

[1-1] $\boldsymbol{v}_{n+1} = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix}$ とすると，x_n，x_{n+1}，x_{n+2} の関係は 2 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて

$\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_n$ のように書くことができる. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$ である場合，a と b を求めよ.

[1-2] $\boldsymbol{A}$ は，2 次正則行列 $\boldsymbol{P}$ とその逆行列 $\boldsymbol{P}^{-1}$，対角行列 $\boldsymbol{B}$ を用いて $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$ のように変形できる. $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}^{-1}$，$\boldsymbol{B}$ をそれぞれ求めよ.

[1-3] $\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}_n$ の関係に基づいて，$\boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{v}_0$ を用いて表せ.

[1-4] [1-3]で求めた $\boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{v}_0$ の関係を利用し，x_n を x_0 と x_1 を用いて表せ.

数　　学	4 枚の内 2

[2] ラプラス変換に関する以下の問いに答えよ．ただし，$f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ は，s を複素数とするとき，

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad (\mathrm{Re}\,[s] > \alpha) \tag{1}$$

で表され，$F(s)$ のラプラス逆変換 $f(t)$ は，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)\, e^{st} ds \qquad (c > \alpha) \tag{2}$$

で表される．ここに，c と α は実数，$i^2 = -1$ であり，$\mathrm{Re}\,[s] > \alpha$ を収束域とする．

[2-1] 以下に定義される $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ．ただし，$\mathrm{Re}\,[s] > 1$ の範囲で考えるものとする．

$$f(t) = \begin{cases} e^t & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$

[2-2] [2-1]で定義された $f(t)$ と $f(t)$ の畳み込み積分 $g(t)$ を求めよ．なお，畳み込み積分は以下のように表される．

$$g(t) = f(t) * f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau$$

[2-3] [2-2] で求めた $g(t)$ のラプラス変換 $G(s)$ を求めよ．ただし，$\mathrm{Re}\,[s] > 1$ の範囲で考えるものとする．

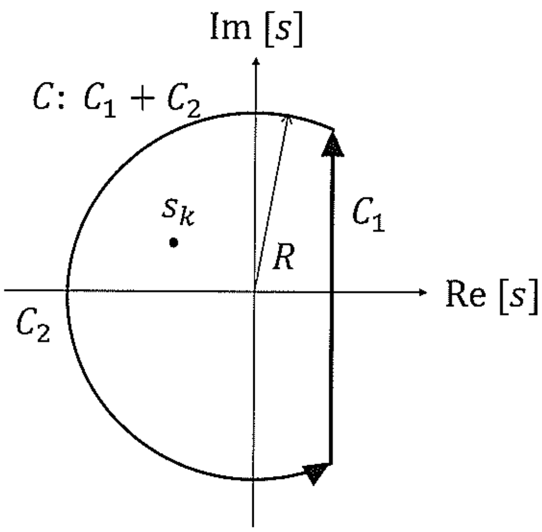
[2-4] [2-3] で求めた $G(s)$ のラプラス逆変換を，(2) 式に基づき，留数定理を用いて求めよ．なお，$H(s)$ が単一閉曲線 C の内部に極 $s_k\ (k = 1, \ldots, n)$ をもち，これらの点を除けば C が囲む領域および C 上で正則であるとき，下図に示すような積分路に沿った $H(s)$ の周回積分は，留数定理より

$$\oint_C H(s)\,ds = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,[H, s_k]$$

で表される．また，m 位（ m は正の整数 ）の極 s_k における $H(s)$ の留数 $\mathrm{Res}\,[H, s_k]$ は次式で与えられる．

$$\mathrm{Res}\,[H, s_k] = \frac{1}{(m-1)\,!} \lim_{s \to s_k} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} \{(s - s_k)^m H(s)\}$$

なお，下図で R を無限大にしたとき，積分路 C_2 に沿う積分は 0 となることを前提としてよい．



数　　学	4 枚の内 4

[3] 次の各問いに答えよ.

[3-1] 独立な事象 A と B について考える. $P(A \cap B) = 2/25$, $P(A \cup B) = 13/25$ が成立するとき, $P(A)$ と $P(B)$ を求めよ. なお, $P(A) < P(B)$ とする.

[3-2] 連続型の確率変数 X の確率密度関数が, 実数 x と定数 C を用いて下式で表される. 以下の問いに答えよ.

$$f(x) = \begin{cases} C(1 - x^2) & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x < -1,\ x > 1) \end{cases}$$

1) 定数 C の値を求めよ.

2) 確率 $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$ を求めよ.

3) 平均 $E[X]$ と分散 $V[X]$ を求めよ.