数　学	２枚の内１

[1] 以下の式について考える.

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

$\boldsymbol{r}$ は２次元平面における位置ベクトルを表し, $\boldsymbol{F} = -\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}, \boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}, |\boldsymbol{e}| = 1, r \neq 0$ である.

[1-1] $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{\nabla}\phi$ が成り立つとき ϕ を求めよ. ここで, ϕ はスカラー量であり, $\boldsymbol{F}$ および $\boldsymbol{\nabla}\phi$ の極座標系における動径方向成分はそれぞれ, $-\frac{1}{r^2}$ および $\frac{\partial\phi}{\partial r}$ で表される.

[1-2] 位置ベクトルが $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の点 A, B がある. ここで, $|\boldsymbol{a}| = a \neq 0, |\boldsymbol{b}| = b \neq 0, a \neq b$ である. 点 A から点 B への経路 C に沿った線積分 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を a, b を用いて表せ. 経路 C は自由に設定して良い. また, 経路 C とは異なる経路で点 A に戻る周回積分 $\oint \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

[1-3] 点 A および点 B における $d\boldsymbol{r}/dt$ を $\boldsymbol{v_a}$ および $\boldsymbol{v_b}$ と表す. ここで, $|\boldsymbol{v_a}| = v_a, |\boldsymbol{v_b}| = v_b$ である. 点 A から点 B への経路 C に沿った線積分 $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ を v_a, v_b を用いて表せ. ただし, 以下の関係を用いて良い.

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)dt$$

[1-4] 式(1)の両辺で $\boldsymbol{r}$ との外積をとると,

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ. これを用いて

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{c}$$

を証明せよ. ここで, $\boldsymbol{c}$ は定数ベクトルである.

数　学	２枚の内２

[2] 関数 $f(t)$ のラプラス変換を次のように定義するとき，以下の問いに答えよ.

$$L(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

[2-1] 関数 $f_1(t) = e^{at}$ のラプラス変換 $L_1(s)$ を求めよ．ただし，a は実数であるとし，$a < \mathrm{Re}[s]$ の範囲で考えるものとする.

[2-2] 関数 $f_2(t) = te^{at}$ のラプラス変換 $L_2(s)$ を求めよ．ただし，a は実数であるとし，$a < \mathrm{Re}[s]$ の範囲で考えるものとする.

[2-3] $L_1(s)$ の極を求め，s に関する複素平面上に示せ.

[2-4] 関数 $f_3(t) = e^{at}\sin bt$ のラプラス変換 $L_3(s)$ が $\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$ と与えられることを示せ.

また，関数 $f_3(t)$ が $t \to \infty$ において有限の値となるために，$L_3(s)$ の極が複素平面上のどのような領域に存在すれば良いか答えよ．ただし，a, b は実数であるとし，$a < \mathrm{Re}[s]$ の範囲で考えるものとする.

[2-5] 関数 $g(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k\, e^{a_k t} \sin(b_k t + \phi_k)$ のラプラス変換 $L_g(s)$ を考える．$g(t)$ が $t \to \infty$ において有限の値となるために，$L_g(s)$ の極は複素平面上のどのような領域に存在すれば良いか答えよ．ただし，a_k, b_k, ϕ_k, A_k は実数，N は自然数であるとし，$\max(a_k) < \mathrm{Re}[s]$ の範囲で考えるものとする.

[2-6] 関数 $u(t)$ が次の常微分方程式を満たすとき，$u(t)$ が $t \to \infty$ において有限の値となるための実数 p の範囲を答えよ.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + pu = \sin 2t$$