数　学	４枚の内１

[1] 原点ではない点 P を考える．$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を点 P の原点に関する位置ベクトルとし，$R = |\boldsymbol{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$，$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ とする．また，m は実数とする．以下の問いに答えよ．ただし，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ は二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を表す．

[1-1] $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ を計算せよ．

[1-2] $\frac{\partial R}{\partial x}$ を計算せよ．

[1-3] ∇R を，$\boldsymbol{r}$ と R で表せ．

[1-4] ∇R^m を，m，R，∇R で表せ．

[1-5] 次式の空欄に入る適切な数式を，∇, R, $\boldsymbol{r}$, m で表せ．

$$\nabla \cdot (R^m \boldsymbol{r}) = R^m \nabla \cdot \boldsymbol{r} + \boxed{}$$

[1-6] 以上の結果を利用して，$\nabla \cdot (R^m \boldsymbol{r})$ を R, m で表せ．

数　学	４枚の内２

[2] 行列 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ について，以下の問いに答えよ．

[2-1] 行列 $\boldsymbol{A}$ の全ての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

[2-2] $\boldsymbol{D}$ を 2×2 対角行列とする．[2-1]の結果から $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ を満たす行列 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}^{-1}$ を求めて，行列 $\boldsymbol{A}$ を対角化せよ．ただし，$\boldsymbol{P}$ は正則行列，$\boldsymbol{P}^{-1}$ はその逆行列である．

[2-3] n を自然数とする．$n\times n$ 行列 $\boldsymbol{B}$ に対して，指数関数 $e^{\boldsymbol{B}}$ を次式で定義する．

$$e^{\boldsymbol{B}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{B}^k}{k!}$$

ここで，$\boldsymbol{B}^0$ は $n\times n$ 単位行列である．

このとき，対角行列 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$（$a,b$ は 0 でない実数）に対して，$e^{\boldsymbol{C}}=\begin{pmatrix}e^a & 0\\ 0 & e^b\end{pmatrix}$ となることを導出せよ．ただし，指数関数のマクローリン展開である以下の式を用いてよい．

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

[2-4] 行列 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{P}^{-1}$ に対して $e^{\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{P}^{-1}e^{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{P}$ が成り立つ．この関係式と [2-3] で導出した関係式を利用して，$e^{\boldsymbol{A}}$ を計算せよ．

数　　学	４枚の内３

[3] 区分的に連続な関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を次のように定義する.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x} dx$$

ここで, i は虚数単位, x と ω は実数である. 以下の問いに答えよ.

[3-1] $f(x)$ が次式で与えられるとき, $F(\omega)$ を計算せよ.

$$f(x) = \begin{cases} c & (|x| \leq c) \\ 0 & (|x| > c) \end{cases}$$

ここで, c は正の実数とする.

[3-2] 次式で与えられる複素関数 $g(z)$ の全ての特異点と各特異点における留数を求めよ.

$$g(z) = \frac{1}{z^2 + 4} e^{i\omega z}$$

ここで, z は複素数とする. なお, 点 a が $g(z)$ の 1 位の極のとき, 留数 $\mathrm{Res}[g, a]$ は,

$$\mathrm{Res}[g, a] = \lim_{z \to a} [(z - a) g(z)]$$

のように求められる.

[3-3] $f(x)$ が次式で与えられるとき, 留数定理と [3-2] の結果を用いて $F(\omega)$ を計算せよ. ただし ω は正の実数とする.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$$

なお, $g(z)$ が閉曲線 C の内部に特異点 a をもち, この点を除けば C で囲まれる領域で正則で, C 上で連続であるとき, 留数定理より $g(z)$ の反時計回りの周回積分は次のように表される.

数　学	４枚の内４

$$\oint_C g(z)\,dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}[g, a]$$

また，以下の式で表されるジョルダンの補助定理を用いてもよい．

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma h(z)e^{ibz}dz\right| \to 0$$

ここで, b は正の実数, $h(z)$ は有理関数で分母の次数が分子より 1 以上大きいものとする.

また，複素座標の原点を中心とする半径 R の上半円反時計回りの積分経路を Γ とする.