物理（力学）	4 枚の内 1

[1] 図 1-1 に示すように，質量m_1およびm_2の 2 つの質点がx軸上にあり，位置をそれぞれ$x_1(t)$，$x_2(t)$とする（$x_1 < x_2$）．両質点はx軸上を運動し，両質点間には距離$r(t) = x_2 - x_1$に応じた引力または斥力が作用するものとする．以下の空欄に適切な数式を埋めよ．ただし，空欄⑦については数式および文章で説明せよ．なお，重力は考慮しないものとする．

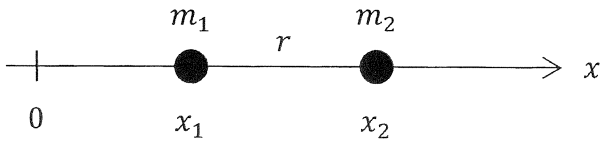

図 1-1

[1-1] まず，両質点間に作用する力が，ばね定数がk，自由長さがr_0の線形ばねにより生じる場合を考える（図 1-2）．

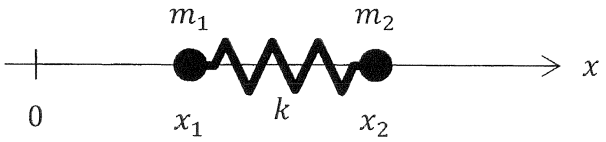

図 1-2

各質点の運動方程式は

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \boxed{\quad ① \quad} \tag{1}$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \boxed{\quad ② \quad} \tag{2}$$

となる．距離rを用いて式(1)，(2)をまとめると，以下の運動方程式が得られる．

$$\boxed{\quad ③ \quad} \tag{3}$$

したがって，この系の周期Tは

$$T = \boxed{\quad ④ \quad} \tag{4}$$

となる．また式(3)を用いれば，この系のポテンシャル$U(r)$は以下のように表せる．

$$U(r) = \boxed{\quad ⑤ \quad} \tag{5}$$

[1-2] つぎに，ばねの代わりに両質点が以下の式(6)で表されるポテンシャル$U(r)$のもとで運動する場合を考える．

$$U(r) = D\left\{e^{-2(r-r_0)} - 2e^{-(r-r_0)}\right\} \tag{6}$$

ここに，D，r_0は正の定数である．

両質点間には$U(r)$により力Fが作用するが，両質点間の距離が有限の値$r^* = \boxed{\quad ⑥ \quad}$のときは力$F$が作用せず平衡点となる．つまり，静止した状態の両質点を距離がr^*となるように置けば両質点は静止し続ける．またこの平衡点が安定な平衡点であることは，

$$\boxed{\quad ⑦ \quad}$$

により説明される．なお，$U(r^*) = \boxed{\quad ⑧ \quad}$である．

この安定な平衡点にある両質点間の距離に微小量εを加えたのち解放することを考える．εを加えたときに両質点間に作用する力$F(r^* + \varepsilon)$は，εの 2 次以降の高次の項を無視すると

$$F(r^* + \varepsilon) \approx \boxed{\quad ⑨ \quad} \cdot \varepsilon \tag{7}$$

と近似できる．したがって，この系の周期Tは，近似的には[1-1]と同様に

$$T = \boxed{\quad ⑩ \quad} \tag{8}$$

となる．

物理（力学）	4 枚の内 3

[2] 以下の空欄①～⑤および⑧～⑪に適切な数式を埋めよ．また，空欄⑥，⑦は｛　｝の中から適切な語句を選べ．

[2-1] 半径 R，質量 M の円板に糸を巻きつけた状態から，円板を落下させる．糸の質量は無視するとする．単位面積あたりの円板の質量は中心からの距離 r のみの関数 $\sigma(r)$ で表されるとすると，円板の中心軸まわりの慣性モーメント I は，

$$I = \int_A \sigma(r)\cdot r^2 dA = \int_0^R 2\pi r\cdot\sigma(r)\cdot r^2 dr \qquad (1)$$

と表される．糸の端を図 2-1 のように固定して落下させるとき，重力加速度を g，糸の張力を T，円板の重心の加速度を α（鉛直下向きを正），円板の角速度を ω（反時計回りを正）とすると，

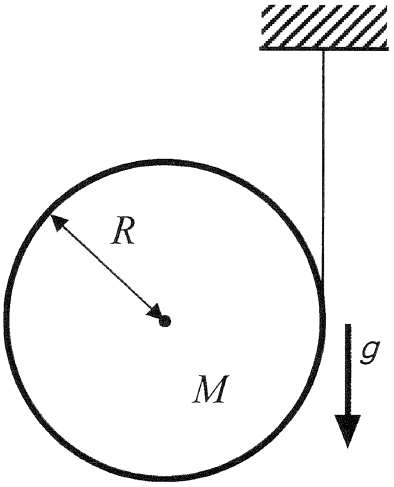

図 2-1

$$M\alpha = \boxed{①} \qquad (2)$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = \boxed{②} \qquad (3)$$

が成り立つ．また，ほどける糸の長さが円板の落下距離に等しいことから，

$$R\frac{d\omega}{dt} = \boxed{③} \qquad (4)$$

が成り立つ．したがって，円板の重心の加速度 α および糸の張力 T は，g, R, M, I を用いて，

$$\alpha = \boxed{④} \qquad (5)$$

$$T = \boxed{⑤} \qquad (6)$$

と表される．したがって，円板の重心の加速度 α を最小にするには，円板の中心軸まわりの慣性モーメント I を ⑥ ｛ 最大 ／ 最小 ｝ にする必要がある．

物理（力学）	4 枚の内 4

式(1)の形から，円板の重心の加速度α を最小にするときの円板の質量分布は，質量が ⑦ ｛ 円板の中心に集中 ／ 円板全体に均等に分布 ／ 円板の外周に集中 ｝ しているときである．

[2-2] つぎに図 2-2 のように，糸をなめらかな釘に掛けて，糸の端に質量 m のおもりを付けた．糸がたるまない状態から円板とおもりを同時にはなす運動を考える．おもりの重心の加速度をβ（鉛直下向きを正），糸の張力を T とすると，式(2), (3)に加えて，

$$m\beta = \boxed{⑧} \qquad (7)$$

$$R\frac{d\omega}{dt} = \boxed{⑨} \qquad (8)$$

が成り立つ．

円板の質量が均等に分布している場合，円板の中心軸まわりの慣性モーメント I は，M と R を用いて，

$$I = \boxed{⑩} \qquad (9)$$

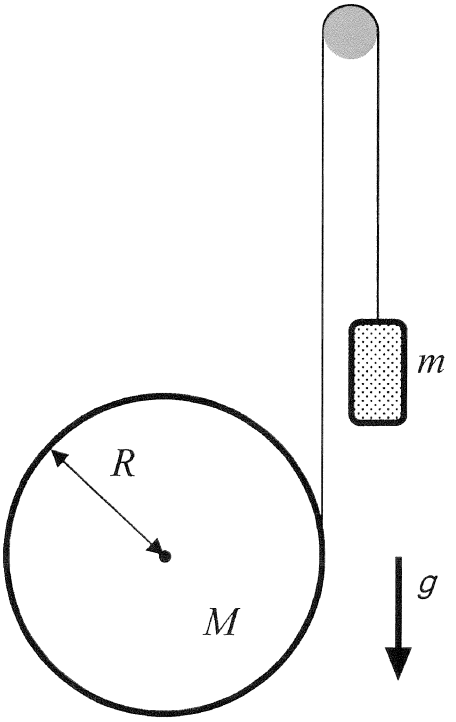

図 2-2

と表される．さらに，おもりの質量 m を変化させてみたところ，円板は落下する一方，おもりは静止を続けた．この場合，円板の質量 M とおもりの質量 m との間には，

$$\boxed{⑪} \qquad (10)$$

の関係がある．